РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Сурков

СУРКОВ Платон Геннадьевич

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2011

Работа выполнена в отделе дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Данилин Алексей Руфимович, доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович.
Ведущая организация:	ГОУ ВПО "Пермский государственный университет".

Защита состоится "24" февраля 2011 года в $11^{\underline{00}}$ час. на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН (620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан "____" января 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Главная цель науки — описание и предсказание. Наблюдая некоторые явления, мы хотим знать, как описать то, что мы видим в настоящий момент, и как определить что произойдет в дальнейшем. Детальное изучение окружающего мира вынуждает нас, хотим мы этого или нет, принять во внимание тот факт, что скорость процессов в физических системах зависит не только от их состояния в настоящий момент времени, но и от предыстории этих процессов. Так возникает отклонение аргумента. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении проблем, связанных с горением в ракетном двигателе, проблем долгосрочного прогнозирования в экономике, ряда биофизических проблем и во многих других областях науки и техники, число которых неуклонно расширяется.

Систематическое изучение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом было начато в середине прошлого века в нашей стране А.Д. Мышкисом[1] и в США Р. Беллманом[2]. С тех пор актуальность приложений, сложность и новизна проблем привлекли и продолжают привлекать к функционально-дифференциальным уравнениям многочисленных исследователей. Этапы создания теории функционально-дифференциальных уравнений нашли отражение в монографиях Н.В. Азбелева, В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной, П.М. Симонова[3], Р. Беллмана, К.Л. Кука[2], А.В. Кима, В.Г. Пименова, Н.Н. Красовского[4], В.Б. Колмановского, В.Р. Носова[5], Ю.А. Митропольского, Д.И. Мартынюка, А.Д. Мышкиса[1], С.Н. Шиманова[6], Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина[7], A. Halanay, J.K. Hale[8], S.M.V. Lunel, J. Wu. Чрезвычайно плодотворной оказалась концепция функционального пространства состояний Н.Н. Красовского. Она позволила связать теорию функционально-дифференциальных уравнений

[1] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. 352 с.

[2] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[3] Азбелев Н.И., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исслед., 2002.

[4] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[5] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

[6] Шиманов С.Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // В кн. Пятая летняя математическая школа, Ужгород, 1967. Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР, 1968. С. 473–549.

[7] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. 296 с.

[8] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

с теорией дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, см. работы Э. Хилле, Р. Филлипса, С.Г. Крейна. На ее основе был достигнут большой прогресс в развитии качественной теории функционально-дифференциальных уравнений и теории управления в работах Н.Н. Красовского, С.Н. Шиманова, Дж. Хейла, Ю.С. Осипова, А.Ф. Клейменова, Ю.С. Колесова, В.Б Колмановского, М.А. Красносельского, А.В. Кряжимского, А.Б. Куржанского, Ю.А. Митропольского, Д.И. Мартынюка, Е.М. Миркушина, Г.Л. Харатишвили, Д.И. Швитра, J.S. Gibson, F. Kappel, D. Salamon.

Для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом хорошо изучена задача Коши на положительной полуоси. Получены условия обеспечивающие непрерывную зависимость решений от начальных функций, т.е. корректность задачи Коши[2,4]. Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на отрицательной полуоси тесно связана с задачей Коши для дифференциальных уравнений с опережающим аргументом на положительной полуоси. Условия существования решений последней задачи имеют сложный вид и не гарантируют непрерывной зависимости решений от начальных функций[1]. Для автономных линейных дифференциальных уравнений с сосредоточенными запаздываниями задача Коши на отрицательной полуоси имеет решение, если оператор, определяющий правую часть уравнения, обратим, начальная функция бесконечно дифференцируема и удовлетворяет счетному набору краевых условий[2]. Если ограничиться классом решений, допускающих экспоненциальную оценку на отрицательной полуоси с заданным показателем экспоненты, то рассматриваемое множество является линейной комбинацией конечного набора экспоненциальных решений, т.е. линейным конечномерным пространством[1]. Последний результат обобщался на неавтономные линейные уравнения с запаздывающими аргументами[9]. Решения, продолжимые на отрицательную полуось, называются двусторонними[8]. Задача нахождения двусторонних решений изучалась в работах Л.Э. Эльсгольца, С.Б Норкина, Ю.А. Рябова, А.М. Седлецкого, Т. Турдиева, L. Bruwier, N. Dantinne, S. Doss, R.D. Driver, J.W. Green. S. Nasr, H.H. Pitt, G. Ryder, E. Schmildt. Условия существования решений задачи Коши на конечном отрезке отрицательной полуоси исследовалась в работах Г.А Каменского, Ю.А. Рябова, J.K. Hale, P. Hastings, E. Kozakiewicz, J.C. Lilo, W. Oliva. Задача Коши на отрицательной полуоси относится к классу обратных задач для дифферен-

[9]Зверкин А.М. О полноте системы решений типа Флоке для уравнения с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, в 3. С. 474–478.

циальных уравнений[10]. Многие обратные задачи сводятся к решению операторных уравнений. Одной из характерных особенностей обратных задач математической физики является их некорректность в наиболее естественных с точки зрения приложений функциональных пространствах. В теории управления изучается обратная задача восстановления управления в динамической системе М.С. Близоруковой, Е.В. Васильевой, М.И. Гусевым, А.В. Кряжимским, А.Б. Куржанским, В.И. Максимовым, Ю.С. Осиповым. При решении обратных задач для дифференциальных уравнений используются методы теории некорректных задач[11,12,13,14].

В работе[15] некорректная задача нахождения решения неавтономного линейного уравнения с запаздыванием на отрезке отрицательной полуоси заменяется нахождением решения операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве. Для решения полученной задачи использовался метод регуляризации А.Н. Тихонова. Показано, что минимизирующий элемент определяется решением сингулярной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе Ю.Ф. Долгого для автономного линейного уравнения с запаздыванием предложен метод нахождения асимптотики для минимизирующего элемента. В настоящей работе продолжаются исследования, начатые в работах Ю.Ф. Долгого, Е.Н. Путиловой. Строится асимптотическое регуляризованное решение дифференциального уравнения с запаздыванием на конечном отрезке отрицательной полуоси. При построении указанного решения используется процедура метода шагов, на каждом шаге которой решается некорректная задача для операторного уравнения первого рода. Задача нахождения минимизирующего элемента метода регуляризации А.Н. Тихонова сводится к задаче нахождения решения сингулярной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении последней задачи используются асимптотические методы интегрирования обыкновенных дифференциаль-

[10] Бухгейм А.Л. Уравнение Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.

[11] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука. 1986. 288 с.

[12] Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993.

[13] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.

[14] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.

[15] Долгий Ю.Ф., Путилова Е.Н. Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 8. С. 1317–1323.

ных уравнений[16,17,18].

Цель работы. Исследование некорректной задачи продолжения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось и построение для нее асимптотических регуляризованных решений.

Методы исследования. В основе работы лежат методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, некорректных задач; используются результаты функционального анализа, теории экстремальных задач и асимптотические методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Основные результаты диссертации:

1. Предложена итерационная процедура решения некорректной задачи продолжения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2. Построены асимптотические регуляризованные решения высокого порядка для автономных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательной полуоси.

3. Изучено влияние выбора формы стабилизирующего функционала на представления асимптотических регуляризованных решений для автономных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

4. Построены асимптотические регуляризованные решения для неавтономных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

5. Построены асимптотические регуляризованные решения для популяционной модели Хатчинсона.

Результаты диссертационной работы являются новыми.

Техническая и практическая ценность работы. В некорректной задаче продолжения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием получены удобные для использования асимптотические формулы для регуляризованных решений. Результаты работы могут быть использованы при восстановлении предысторий динамических процессов в математических моделях с последействием.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Система нумерации утверждений и формул содержит два индекса, первый из них — номер главы, второй — номер объекта. Общий объем работы составляет 108 страницы машинописного текста.

---

[16]Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

[17]Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: АН УССР, 1954.

[18]Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на конференциях молодых ученых Института математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2007, 2008, 2009, 2010); 38-ой, 39-ой, 41-ой региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2007, 2008, 2010); Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (Новосибирск, 2007); II Международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования" (Воронеж, 2007); научной конференции-семинаре "Теория управления и математическое моделирование" (Ижевск, 2008); Международной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященной 100-летию со дня рождения В.К. Иванова (Екатеринбург, 2008); Международной конференции "Дифференциальные уравнения и топология", посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008); Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (Москва, 2009); XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Конференции Пятницкого) (Москва, 2010); II Международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (Иркутск, 2010).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–17].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы, приводятся формулировки и описания основных утверждений диссертации, сведения о литературе, относящейся к истории рассматриваемого вопроса.

В **первой главе** исследуется задача продолжения решений линейных автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось. Глава состоит из 6 параграфов.

В параграфе 1.1 приводится постановка задачи для линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-r), \quad t \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0], \tag{1}$$

где $x\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — постоянные матрицы размера $n \times n$. На рассматриваемую систему накладывается ограничение $\det B \neq 0$. Решения задачи Коши для системы (1) на полуоси $(-\infty, 0]$ предлагается искать с помощью пошаговой процедуры в функциональном пространстве состояний, на каждом шаге которой требуется решать уравнения $Ux_k = x_{k+1}$, $k \leq -1$. Здесь и далее все индексы являются целыми числами из указанных промежутков, а линейный вполне непрерывный оператор U, действующий в пространстве $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$[2,4], определяется формулой

$$(U\varphi)(\vartheta) = \exp(A(r+\vartheta))\varphi(0) + \int_{-r}^{\vartheta} \exp(A(\vartheta - s))B\varphi(s)\,ds, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \quad (2)$$

Реализация пошаговой процедуры связана с решением операторного уравнения первого рода $Ux = \varphi$.

Поставленные задачи являются некорректными. В настоящей работе для их решения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова[8]. Тогда, используя пошаговую процедуру

$$x_k = R(x_{k+1}, \delta), \quad k \leq -1, \quad x_0 = \varphi, \quad (3)$$

где δ — допустимая погрешность, R — регуляризирующий оператор уравнения $Ux = \varphi$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2([-r, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi^{\mathrm{T}}(0)\varphi(0) + \int_{-r}^{0} \psi^{\mathrm{T}}(s)\varphi(s)\,ds$, находим регуляризованные решения системы (1) на отрицательной полуоси.

В параграфе 1.2 задача нахождения значения регуляризирующего оператора сводится к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения значения регуляризирующего оператора используется метод Лагранжа со стабилизирующим функционалом

$$\Omega[x] = x^{\mathrm{T}}(0)Gx(0) + \int_{-r}^{0} (x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s) + (x')^{\mathrm{T}}(s)Px'(s))\,ds, \quad x \in H,$$

где G, P, Q — симметричные положительно-определенные матрицы. При этом значение регуляризирующего оператора определяется зависимостью

$$x_\delta = R(\varphi, \delta) = x_{\alpha(\delta,\varphi)}.$$

Здесь элемент $x_\alpha \in H$ минимизирует сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi, x] = (Ux - \varphi, Ux - \varphi) + \alpha\Omega[x], \quad (4)$$

а значение параметра регуляризации $\alpha > 0$ определяется как значение функции $\alpha(\delta, \varphi)$ из уравнения невязки

$$(Ux_\alpha - \varphi, Ux_\alpha - \varphi) = \delta^2. \tag{5}$$

Из необходимого условия минимума функционала (4) получаем систему интегро-дифференциальных уравнений с краевыми условиями для нахождения минимизирующего элемента x_α

$$\begin{aligned} &(U^*Ux)(\vartheta) + \alpha(Qx(\vartheta) - Px''(\vartheta)) = (U^*\varphi)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0), \\ &(U^*Ux)(0) + \alpha(Gx(0) + Px'(0)) = (U^*\varphi)(0), \quad x'(-r) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь сопряженный оператор U^* определяется формулами

$$(U^*\psi)(\vartheta) = \begin{cases} \exp(A^{\mathrm{T}}r)\left(\psi(0) + \int\limits_{-r}^{0} \exp(A^{\mathrm{T}}s)\psi(s)\,ds\right), & \vartheta = 0, \\ B^{\mathrm{T}}\exp(-A^{\mathrm{T}}\vartheta)\left(\psi(0) + \int\limits_{\vartheta}^{0} \exp(A^{\mathrm{T}}s)\psi(s)\,ds\right), & \vartheta \in [-r, 0). \end{cases}$$

Систему уравнений для минимизирующего элемента можно заменить эквивалентной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Утверждение 1 *Пусть* $\det B \neq 0$. *Тогда минимизирующий элемент* x_α *является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered} x'' = P^{-1}Qx + \alpha^{-1}P^{-1}(\psi - z(\vartheta)), \\ \psi' = -C^{\mathrm{T}}\psi - B^{\mathrm{T}}\chi, \\ \chi' = A\chi + Bx \end{gathered} \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} x'(-r) = 0, \quad \psi(-r) + \alpha B^{\mathrm{T}}(Gx(0) + Px'(0)) = z(-r), \\ \psi(0) = B^{\mathrm{T}}\chi(0), \quad x(0) = \chi(-r). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $C = B^{-1}AB$, *функция* z *является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$z' = -C^{\mathrm{T}}z - B^{\mathrm{T}}\varphi(\vartheta), \quad z(0) = B^{\mathrm{T}}\varphi(0),$$

$\varphi \in H$, *компонента* χ_α *решения краевой задачи* (7), (8) *удовлетворяет условию* $\chi_\alpha = Ux_\alpha$, α *малый положительный параметр.*

В параграфе 1.3 построено асимптотическое решение краевой задачи (7), (8).

Теорема 1 *Пусть* $\varphi \in H^{m+1}$, $\det B \neq 0$ *и собственные числа матрицы* $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ *простые. Тогда решение краевой задачи* (7), (8) *определяется асимптотической формулой*

$$x_\alpha(\vartheta,\varphi) = T\sum_{a=0}^{m-1}\alpha^{a/4}\Bigg(\sum_{j=1}^{4}\sum_{|q^3|=a} K_j^{q_1}\exp(\alpha^{-1/4}J_j^0(\vartheta-\vartheta_j))E_j^{q_2}(\vartheta)D_j^{q_3} - \\ - y_a(\vartheta)\Bigg) + \mathbf{O}(\alpha^{m/4};\vartheta,\varphi), \quad \vartheta\in[-r,0], \tag{9}$$

где T — *неособая матрица, приводящая матрицу* $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ *к жордановой форме,* $J = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$, λ_k, $k=\overline{1,n}$, *положительные числа,* $\mathbf{O}(\alpha^{(m+1)/4};\cdot,\varphi)$ *значение линейного непрерывного отображения* $: H^{m+1}\to C$.

При доказательстве теоремы описана процедура, позволяющая однозначно находить коэффициенты $J_j^{q_1}$, $K_j^{q_2}$, $E_j^{q_3}(\vartheta)$, $D_j^{q_4}$, $q_j=\overline{0,m-1}$, $j=\overline{1,4}$.

В параграфе 1.4 исследуется вопрос разрешимости уравнения невязки (5).

Утверждение 2 *Пусть* $\varphi\in H^m$, $\det B\neq 0$, *собственные числа матрицы* $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ *простые и* $\Delta(\varphi)\neq 0$. *Тогда зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности выражается следующей формулой*

$$\alpha = \delta^{8/3}\left(\sum_{a=0}^{m-1}\hat{\gamma}_a(\varphi)\delta^{2a/3}\right)^{4} + \mathbf{O}(\delta^{2(m+4)/3};\varphi), \quad \varphi\in H^{m+1}. \tag{10}$$

где $O(\delta^{10/3},\cdot)$ — *непрерывное отображение* $: H^{m+1}\to\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$, *определенное на множестве* $\Delta(\varphi)=\varphi(-r)-B^{-1}(\varphi'(0)-A\varphi(0))\neq 0$ *при малых положительных значениях* δ.

При доказательстве утверждения описана процедура, позволяющая однозначно находить коэффициенты $\hat{\gamma}_a(\varphi)$, $a=\overline{0,m}$.

Теорема 2 *Пусть $\varphi \in H^{m+1}$, $\det B \neq 0$, собственные числа матрицы $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ простые и $\Delta(\varphi) \neq 0$. Тогда значение регуляризирующего оператора определяется асимптотической формулой*

$$
\begin{gathered}
R(\varphi,\delta)(\vartheta) = B^{-1}(\varphi'(\vartheta) - A\varphi(\vartheta)) + \\
+ T\sum_{j=1}^{2}\exp((\delta^{-2/3}\zeta_0(\varphi) + \zeta_1(\varphi))e_j J^{1/4}(\vartheta - \vartheta_j))D_j^0 + \sum_{a=1}^{m-1}\delta^{2a/3}\times \\
\times\Bigg(\sum_{b+c=a}\sum_{j=1}^{4} S_j^b(\vartheta,\varphi)\exp((\delta^{-2/3}\zeta_0(\varphi) + \zeta_1(\varphi))e_j J^{1/4}(\vartheta - \vartheta_j))D_j^c - \\
- Ty_a(\vartheta)\Bigg) + \mathbf{O}(\delta^{2m/3};\vartheta,\varphi),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

где $S_j^b(\vartheta,\varphi) = T\sum_{d+e=b}\sum_{|b^a|=e}\hat{\gamma}_{b_1}(\varphi)\dots\hat{\gamma}_{b_a}(\varphi)\sum_{|d^3|=d}K_j^{d_1}\widetilde{E}_j^{d_2}(\vartheta)E_j^{d_3}(\vartheta)$, $b = \overline{1, m-1}$, $\mathbf{O}(\delta^{1/3};\cdot,\varphi)$ — *значение непрерывного на множестве* $\Delta(\varphi) \neq 0$ *отображения* : $H^{m+1} \to C$, *определенного при малых положительных* δ.

При доказательстве теоремы описана процедура, позволяющая однозначно находить коэффициенты $\zeta_a(\varphi)$, $\widetilde{E}_j^a(\vartheta)$, W_j^a, $\gamma_a(\varphi)$, $a = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1,4}$.

Для удобства численного моделирования (11) вводится оператор $R_1\colon H^2 \to H$, определяемый формулами

$$
\begin{gathered}
R_1(\varphi)(\vartheta) = B^{-1}(\varphi'(\vartheta) - A\varphi(\vartheta)), \quad \vartheta \in [-r, 0), \\
R_1(\varphi)(0) = \varphi(-r),
\end{gathered}
\tag{12}
$$

и операторы $R_m\colon H^{m+1} \to H$, определяемые формулами

$$
\begin{gathered}
R_m(\varphi,\delta)(\vartheta) = B^{-1}(\varphi'(\vartheta) - A\varphi(\vartheta)) + \\
+ T\sum_{j=1}^{2}\exp((\delta^{-2/3}\zeta_0(\varphi) + \zeta_1(\varphi))e_j J^{1/4}\vartheta)D_j^0 + \sum_{a=1}^{m-1}\delta^{2a/3}\times \\
\times\Bigg(\sum_{b+c=a}\sum_{j=1}^{4} S_j^b(\vartheta,\varphi)\exp((\delta^{-2/3}\zeta_0(\varphi) + \zeta_1(\varphi))e_j J^{1/4}(\vartheta - \vartheta_j))D_j^c - \\
- Ty_a(\vartheta)\Bigg), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad m \geq 2.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Каждый из введенных операторов содержит конечное число членов асимптотического разложения значения регуляризирующего оператора $R(\varphi,\delta)$ по $\delta^{2/3}$.

Теорема 3 *Пусть* $\det B \neq 0$ *и собственные числа матрицы* $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ *простые. Тогда для уравнения* $Ux = \varphi$ *на множестве* $\Delta(\varphi) \neq 0$, $\varphi \in H^{m+1}$, *оператор* R_m, $m \geq 1$, *является регуляризирующим.*

В параграфе 1.5 строится регуляризованное решение на конечном отрезке отрицательной полуоси с помощью специальной последовательности функций

$$\varphi_k(\vartheta) = B^{-1}(\varphi'_{k+1}(\vartheta) - A\varphi_{k+1}(\vartheta)), \quad k = \overline{-N, -1},$$

$$\varphi_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

где $\varphi \in H^{N+m+1}$, $N \geq 2$. Используя эту последовательность, определим новые последовательности

$$x_k^1(\vartheta, \varphi) = R_1(\varphi_{k+1})(\vartheta), \quad k = \overline{-N, -1}, \quad \vartheta \in [-r, 0],$$

$$x_k^m(\vartheta, \varphi, \delta) = R_m(\varphi_{k+1}, \delta)(\vartheta), \quad k = \overline{-N, -1}, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Введем функции $x^1(\cdot, \varphi)$, $x^m(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{t^-}$, с помощью формул $x^1(t, \varphi) = x_k^1(t - kr, \varphi)$, $x^m(t, \varphi, \delta) = x_k^m(t - kr, \varphi, \delta)$, $t \in ((k-1)r, kr]$, $k = \overline{-N+1, -1}$, $x^1(t, \varphi) = x_k^1(t - kr, \varphi)$, $x^m(t, \varphi, \delta) = x_k^m(t - kr, \varphi, \delta)$, $t \in [t^-, -Nr]$. Здесь N равняется целой части числа $|t^-|/r$.

Теорема 4 *Пусть* $\det B \neq 0$ *и собственные числа матрицы* $P^{-1}B^{\mathrm{T}}B$ *простые. Тогда в задаче построения решений системы* (1) *на отрезке* $[t^-, -r]$ *для начальных функций из множества* $\{\varphi\colon \Delta(\varphi_k) \neq 0,\ k = \overline{-N+1, -1},\ \varphi \in H^{N+m+1}\}$ *отображения* $H^{N+m+1} \to H_{t^-}$, *определяемые формулами* $\varphi \to x^1(\cdot, \varphi)$ *и* $\varphi \to x^m(\cdot, \varphi, \delta)$ *являются регуляризирующими. Здесь целая часть числа* $|t^-|/r$ *равняется* N.

Функции $x^1(\cdot, \varphi) \in H_{t^-}$ и $x^m(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{t^-}$ будем называть асимптотическими регуляризованными решениями системы (1) на отрезке $[t^-, -r]$.

В параграфе 1.6 для нахождения значения регуляризирующего оператора применяется разработанный алгоритм нахождения регуляризованных решений на отрицательной полуоси с использованием стабилизирующего функционала следующего вида

$$\Omega[x] = x^{\mathrm{T}}(-r)G_1x(-r) + x^{\mathrm{T}}(0)G_2x(0) + \int_{-r}^{0} (x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s) + (x')^{\mathrm{T}}(s)Px'(s))ds,$$

$x \in \widehat{H} = \mathbb{R}^n \times L_2((-r,0),\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$, где G_1, G_2, P, Q — симметричные положительно определенные матрицы, $\widehat{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\varphi,\psi) = \psi^{\mathrm{T}}(-r)\varphi(-r) + \psi^{\mathrm{T}}(0)\varphi(0) + \int_{-r}^{0}\psi^{\mathrm{T}}(s)\varphi(s)\,ds$.

Вторая глава диссертации, состоящая из 5 параграфов, посвящена исследованию задачи продолжения решений линейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось.

В параграфе 2.1 дана формулировка задачи, которой посвящена глава 2. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r), \quad t \in (-\infty,0], \tag{14}$$

где $x\colon (-\infty,0] \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$, A и B — непрерывные матричнозначные функции на $(-\infty,0]$, $\det B(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty,0]$.

Решение поставленной задачи осложняется неавтономностью системы (14). При ее решении используются асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

По аналогии с методикой главы 1 рассматривается пошаговая процедура и задача нахождения решения на отрицательной полуоси сводится к некорректной. В параграфе 2.2 для решения последней задачи используется метод А.Н. Тихонова со стабилизирующим функционалом

$$\Omega[x] = x^{\mathrm{T}}(0)Gx(0) + \int_{-r}^{0}(x^{\mathrm{T}}(s)Q(s)x(s) + (x')^{\mathrm{T}}(s)P(s)x'(s))\,ds, \tag{15}$$

$x \in H$, где G, $P(s)$, $Q(s)$ ($s \in [-r,0]$) — симметричные положительно определенные матрицы, матричнозначные функции P и Q непрерывны.

Значение регуляризирующего оператора определяется так же как в параграфе 1.2, как элемент минимизирующий сглаживающий функционал (4), а параметр регуляризации выбирается по допустимой погрешности согласно уравнению невязки (5). Получена система уравнений для нахождения минимизирующего элемента

$$\begin{aligned}
&(U_{k+1}^{*}U_{k+1}x)(\vartheta) + \alpha(Q(\vartheta)x(\vartheta) - (P(\vartheta)x'(\vartheta))') = \\
&\quad = (U_{k+1}^{*}x_{k+1})(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r,0), \\
&(U_{k+1}^{*}U_{k+1}x)(0) + \alpha(Gx(0) - P(0)x'(0)) = \\
&\quad = (U_{k+1}^{*}x_{k+1})(0), \quad k \leq -1, \quad x'(-r) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь U^*_{k+1} $(k \le -1)$ — сопряженный оператор, определяемый формулами

$$(U^*_{k+1}\psi)(\vartheta) = \begin{cases} (V_{k+1}\psi)(-r), & \vartheta = 0, \\ B^{\mathrm{T}}_{k+1}(\vartheta)(V_{k+1}\psi)(\vartheta), & \vartheta \in [-r, 0). \end{cases}$$

где $(V_{k+1}\psi)(\vartheta) = W^{-1\mathrm{T}}_{k+1}(\vartheta)(W^{\mathrm{T}}_{k+1}(0)\psi(0) + \int_\vartheta^0 W^{\mathrm{T}}_{k+1}(s)\psi(s)\,ds)$, $\vartheta \in [-r, 0)$.

Утверждение 3 *Пусть A, Q непрерывные, а B и P непрерывно дифференцируемые матричнозначные функции на $(-\infty, 0]$ и $[-r, 0]$ соответственно, $\det B(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty, 0]$. Тогда минимизирующий элемент $x_{k\alpha}$ $(k \le -1)$ является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$x''_k = P^{-1}(\vartheta)\big(Q(\vartheta)x_k - P'(\vartheta)x'_k\big) + \alpha^{-1}P^{-1}(\vartheta)\big(\psi_k - z_k(\vartheta)\big),$$
$$\psi'_k = \Big(B^{-1}_{k+1}(\vartheta)\big(B'_{k+1}(\vartheta) - A_{k+1}(\vartheta)B_{k+1}(\vartheta)\big)\Big)^{\mathrm{T}}\psi_k - B^{\mathrm{T}}_{k+1}(\vartheta)\chi_k, \tag{17}$$
$$\chi'_k = A_{k+1}(\vartheta)\chi_k + B_{k+1}(\vartheta)x_k$$

с краевыми условиями

$$x'_k(-r) = 0, \quad \psi_k(-r) + \alpha B^{\mathrm{T}}_{k+1}(-r)\big(Gx_k(0) + P(0)x'_k(0)\big) = z_k(-r),$$
$$\psi_k(0) = B^{\mathrm{T}}_{k+1}(0)\chi_k(0), \quad x_k(0) = \chi_k(-r). \tag{18}$$

Здесь функция z_k является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z'_k = (B^{-1}_{k+1}(\vartheta)(B'_{k+1}(\vartheta) - A_{k+1}(\vartheta)B_{k+1}(\vartheta)))^{\mathrm{T}}z_k - B^{\mathrm{T}}_{k+1}(\vartheta)x_{k+1}(\vartheta),$$
$$z_k(0) = B^{\mathrm{T}}_{k+1}(0)x_{k+1}(0),$$

где $A_{k+1}(\vartheta) = A((k+1)r+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, компонента $\chi_{k\alpha}$ решения краевой задачи (17), (18) *удовлетворяет условию $\chi_{k\alpha} = U_{k+1}x_{k\alpha}$, $k \le -1$, $x_0 = \varphi \in H$, α малый положительный параметр.*

В параграфе 2.3 решается краевая задача (17), (18) при $k = -1$. Переходя к переменным: $x_1 = x$, $x_2 = \alpha^{1/4}x'$, $x_3 = \alpha^{1/2}x''$, $x_4 = \alpha^{3/4}x'''$, полученную краевую задачу сводим к виду

$$\frac{dX}{d\vartheta} = (\alpha^{-1/4}\mathcal{A}(\vartheta) + \mathcal{A}_0(\vartheta) + \alpha^{1/4}R(\vartheta, \alpha))X + \alpha^{-1/4}\widetilde{\Phi}(\vartheta),$$
$$\mathcal{B}_1(\alpha)X(0) + \mathcal{B}_2(\alpha)X(-r) = b. \tag{19}$$

Теорема 5 *Пусть* $\varphi \in H^2$, $\det B_0(\vartheta) \neq 0$, $\vartheta \in [-r, 0]$, *собственные числа матрицы* $P^{-1}(\vartheta)B_0^{\mathrm{T}}(\vartheta)B_0(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-r, 0]$) – *простые и* A_0 *непрерывно дифференцируемая,* B_0, P, Q — *дважды непрерывно дифференцируемые матричнозначные функции на* $[-r, 0]$. *Тогда компоненты решения краевой задачи* (19) *определяются асимптотическими формулами*

$$\begin{gathered} x_s(\vartheta, \varphi, \alpha) = \widehat{\mathbb{S}}(\vartheta, \alpha, s)\Delta(\varphi) + \\ + \delta_{s1} B_0^{-1}(\vartheta)(\varphi'(\vartheta) - A_0(\vartheta)\varphi(\vartheta)) + \mathrm{O}(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi), \end{gathered} \tag{20}$$

где $\widehat{\mathbb{S}}(\vartheta, \alpha, s) = \sqrt{2}/2\, S(\vartheta) J_0^{(s-1)/4}(\vartheta)\Gamma_0(\vartheta) \sum_{j=1}^{2} e_j^{s-2} \times \exp(\alpha^{-1/4} e_j \int_0^{\vartheta} J_0^{1/4}(\tau)\, d\tau)\Gamma_0^{-1}(0) S^{-1}(0)$, $s = \overline{1,4}$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $\Delta(\varphi) = \varphi(-r) - B_0^{-1}(0)(\varphi'(0) - A_0(0)\varphi(0))$.

При доказательстве теоремы введены обозначения: $\lambda_k(\vartheta)$, $k = \overline{1,n}$, — собственные числа матрицы $P^{-1}(\vartheta)B^{\mathrm{T}}(\vartheta)B(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-r, 0]$), с учетом их кратности; $e_1 = \bar{e}$, $e_2 = e$, $e_3 = -\bar{e}$, $e_4 = -e$, $e = (1+i)/\sqrt{2}$. Тогда жорданова форма матрицы $P^{-1}(\vartheta)B_0^{\mathrm{T}}(\vartheta)B_0(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-r, 0]$) имеет вид $J_0(\vartheta) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(\vartheta), \ldots, \lambda_k(\vartheta)\big)$, матрица $S(\vartheta)$ — приводит ее к жордановой форме.

$$\Gamma_0(\vartheta) = \operatorname{diag}(\gamma_1(\vartheta), \gamma_2(\vartheta), \ldots, \gamma_n(\vartheta)), \quad \gamma_m(\vartheta) = \exp\Bigg(-\int\limits_{-r}^{\vartheta} \beta_m(s)\, ds\Bigg),$$

$$\begin{gathered} \beta_m(\vartheta) = \sum_{j=1}^{n} s_{mj}^{-1}(\vartheta) s'_{jm}(\vartheta) + \frac{3}{8}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{-1}(\vartheta)\lambda'_j(\vartheta) - \\ - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{mj}^{-1}(\vartheta) a_{jk}(\vartheta) s_{km}(\vartheta), \quad m = \overline{1,n}, \end{gathered}$$

$$S(\vartheta) = \|s_{ij}(\vartheta)\|_1^n, \quad S^{-1}(\vartheta) = \|s_{ij}^{-1}(\vartheta)\|_1^n, \quad \widehat{A}_3(\vartheta) = \|a_{ij}(\vartheta)\|_1^n,$$

$$\begin{gathered} \widehat{A}_3(\vartheta) = -P^{-1}(\vartheta)B_0^{\mathrm{T}}(\vartheta)(A_0(\vartheta)B_0^{-1\mathrm{T}}(\vartheta) - B_0^{-1\mathrm{T}'}(\vartheta))P(\vartheta) - P^{-1}(\vartheta)\widehat{A}(\vartheta)P(\vartheta) + \\ + 3P^{-1}(\vartheta)P'(\vartheta), \quad \widehat{A}(\vartheta) = (B_0^{-1}(\vartheta)(B_0'(\vartheta) - A_0(\vartheta)B_0(\vartheta)))^{\mathrm{T}}, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \end{gathered}$$

В параграфе 2.4 исследуется вопрос разрешимости уравнения невязки.

Утверждение 4 *Пусть выполнены условия теоремы 5 и* $\Delta(\varphi) \neq 0$. *Тогда зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности выражается следующей формулой*

$$\alpha(\delta, \varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi)\delta^{8/3} + O(\delta^{10/3}, \varphi), \quad \varphi \in H^2, \tag{21}$$

где $\gamma(\varphi) = \sqrt{2}/4\,\Delta^{\mathrm{T}}(\varphi)S^{-1\mathrm{T}}(0)J_0^{1/4}(0)S^{-1}(0)\Delta(\varphi)$, $O(\delta^{10/3},\cdot)$ *непрерывное отображение* : $H^2 \to \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$, *определенное на множестве* $\Delta(\varphi) \neq 0$ *при малых положительных значениях* δ.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия утверждения 4. Тогда значения регуляризирующего оператора для уравнения* $U_0x = \varphi$ *на множестве* $D = \{\varphi\colon \Delta(\varphi) \neq 0, \varphi \in H^2\}$ *определяются асимптотическими формулами*

$$R(\varphi,\delta)(\vartheta) = \mathbb{S}(\vartheta,\varphi,\delta)\Delta(\varphi) + B_0^{-1}(\vartheta)(\varphi'(\vartheta) - A_0(\vartheta)\varphi(\vartheta)) + \\ + \mathbf{O}(\delta^{2/3};\vartheta,\varphi), \quad \vartheta \in [-r,0], \tag{22}$$

где $\mathbb{S}(\vartheta,\varphi,\delta) = \sqrt{2}/2\,S(\vartheta)\Gamma_0(\vartheta)\sum_{j=1}^{2} e_j^{-1}\exp(\alpha^{-1/4}(\delta,\varphi)e_j\int_0^{\vartheta} J_0^{1/4}(\tau)\,d\tau)\times$ $\times\Gamma_0^{-1}(0)S^{-1}(0)$, $\vartheta \in [-r,0]$, $\mathbf{O}(\delta^{2/3};\cdot,\varphi)$ *значение непрерывного отображения* : $D \to C$, *определенного при малых положительных* δ.

Для численного моделирования (22) введем оператор: $R^1\colon D \to H$, определяемый формулами

$$R^1(\varphi)(\vartheta) = B_0^{-1}(\vartheta)(\varphi'(\vartheta) - A_0(\vartheta)\varphi(\vartheta)), \quad \vartheta \in [-r,0), \quad R_1(\varphi)(0) = \varphi(-r),$$

и оператор $R^2\colon D \to H$, определяемый формулами

$$R^2(\varphi,\delta)(\vartheta) = \tilde{\mathbb{S}}(\vartheta,\varphi,\delta)\Delta(\varphi) + B^{-1}(\vartheta)\big(\varphi'(\vartheta) - A(\vartheta)\varphi(\vartheta)\big),$$

$$\tilde{\mathbb{S}}(\vartheta,\varphi,\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2}S(\vartheta)\Gamma_0(\vartheta)\sum_{j=1}^{2} e_j^{-1}\exp\left(\tilde{\alpha}^{-1/4}(\delta,\varphi)e_j\int_0^{\vartheta} J_0^{1/4}(\tau)\,d\tau\right)\times$$

$$\times\Gamma_0^{-1}(0)S^{-1}(0), \quad \vartheta \in [-r,0], \quad \tilde{\alpha}(\delta,\varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi)\delta^{8/3}.$$

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для уравнения* $U_0x = \varphi$ *операторы* $R^1\colon D \to H$ *и* $R^2\colon D \to H$ *являются регуляризирующими.*

В параграфе 2.5 строятся асимптотические регуляризованные решения системы (14) на конечном отрезке отрицательной полуоси.

В **третьей главе** исследуется задача продолжения решений уравнения Хатчинсона на отрицательную полуось. Глава состоит из 4 параграфов.

В параграфе 3.1 производится постановка задачи для популяционной модели Хатчинсона, описываемой дифференциальным уравнением с запаздыванием[19,20,21]

$$\frac{dN(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{1}{k}N(t-h)\right)N(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{23}$$

где $N\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ — численность популяции, r — мальтузианский коэффициент линейного роста, k — емкость среды обитания, h — возраст полового созревания.

Предполагается известной информация о численности популяции на промежутке времени $[t_0 - h, t_0]$. В дальнейшем, без ограничения общности, будем полагать, что $t_0 = 0$. Численность популяции на отрезке $[-h, 0]$ определяется положительной функцией φ, принадлежащей сепарабельному гильбертову пространству $H = L_2[-h, 0) \times \mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi(0)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \psi(s)\varphi(s)ds$. При восстановлении численности используем метод шагов в сторону убывания времени. Тогда для нахождения функций $x_m(\vartheta) = N(mh + \vartheta)$, $\vartheta \in [-h, 0]$, $m \le -1$, имеем систему уравнений

$$U(x_m) = x_{m+1}, \quad m \le -1, \quad x_0 = \varphi, \tag{24}$$

где оператор $U\colon H \to H$ определяется формулой

$$U(x)(\vartheta) = \exp\left(r(h + \vartheta) - \frac{r}{k}\int_{-h}^{\vartheta} x(s)\,ds\right)x(0), \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Таким образом, восстановление численности популяции связано с решением некорректной задачи

$$U(x) = \varphi.$$

В параграфе 3.2 при решении поставленной некорректной задачи используем метод регуляризации А.Н. Тихонова. Выбираем стабилизирующий функционал следующего вида

$$\Omega[x] = Gx^2(0) + \int_{-h}^{0} (Qx^2(s) + P(x')^2(s))ds, \quad x \in W_2^1[-h, 0].$$

---

[19] Hutchinson G.E. Circular casual systems in ecology // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.

[20] Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Тр. мат. ин-та В.А. Стеклова. 1993. Т. 199. с. 123.

[21] Хэссард Б, Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.

где G, P, Q — положительные числа, x' — производная функции x.

Из необходимого условия минимума сглаживающего функционала получаем систему уравнений для нахождения минимизирующего элемента

$$(U_x'^*(x)U(x))(\vartheta) + \alpha(Qx(\vartheta) - Px''(\vartheta)) =$$

$$= (U_x'^*(x)\varphi)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0), \tag{25}$$

$$(U_x'^*(x)U(x))(0) + \alpha(Gx(0) + Px'(0)) = (U_x'^*(x)\varphi)(0), \quad x'(-h) = 0.$$

Здесь производная Гато оператора U в точке x определяется формулой

$$(U_x'(x)y)(\vartheta) = \exp\left(r(h+\vartheta) - \frac{r}{k}\int_{-h}^{\vartheta} x(s)\,ds\right)\left(y(0) - \frac{r}{k}x(0)\int_{-h}^{\vartheta} y(s)\,ds\right),$$

$$\vartheta \in [-h, 0],$$

сопряженный оператор $U_x'^*(x)$ определяется формулами

$$(U_x'^*(x)y)(\vartheta) = \begin{cases} (V(x)y)(-h), & \vartheta = 0, \\ -\dfrac{r}{k}x(0)(V(x)y)(\vartheta), & \vartheta \in [-h, 0). \end{cases}$$

где $(V(x)y)(\vartheta) = \exp(rh - (r/k)\int_{-h}^{0} x(s)\,ds)(y(0) + \int_{\vartheta}^{0} \exp(rs - (r/k)\int_0^s x(s_1)\,ds_1)y(s)\,ds)$, $\vartheta \in [-h, 0)$.

Утверждение 5 *Возможный минимизирующий элемент x_α является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$x'' = P^{-1}Qx + \alpha^{-1}P^{-1}\psi, \quad \psi' = \frac{r}{k}\chi(\chi - \varphi(\vartheta)), \quad \chi' = r(1 - \frac{1}{k}x)\chi \tag{26}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} x'(-h) = 0, \quad \psi(-h) - \alpha\frac{r}{k}x(0)(Gx(0) + Px'(0)) = 0, \\ \psi'(0) + \psi(0) = 0, \quad x(0) = \chi(-h), \end{gathered} \tag{27}$$

где $\varphi \in H$, компонента χ_α решения краевой задачи (26), (27) *удовлетворяет условию $\chi_\alpha = U(x_\alpha)$, α — малый положительный параметр.*

Вводя переменные, с помощью формул $x_1 = x$, $x_2 = \alpha^{1/4}x'$, $x_3 = \alpha^{1/2}x''$, $x_4 = \alpha^{3/4}x'''$, и вектор $X = \|x_j\|_1^4$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{d\vartheta} = \alpha^{-1/4}\mathcal{A}(\vartheta)X + \alpha^{-1/4}\widetilde{\Phi}_1(\vartheta) + \widetilde{\Phi}_2(\vartheta, \alpha, X), \tag{28}$$

где $\mathcal{A}(\vartheta) = \|-\delta_{i4}r^2\varphi^2(\vartheta)/(k^2P), \delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}\|_1^4$, $\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{T}}(\vartheta) = (0,0,0,r\varphi(\vartheta)(r\varphi(\vartheta)-\varphi'(\vartheta))/(kP))$, $\widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{T}}(\vartheta,\alpha,X) = (0,0,0,(2(r\varphi(\vartheta)(1-(1/k)\,x_1) - \varphi'(\vartheta))(Px_4 - \alpha^{1/2}Qx_2))/((\varphi^2(\vartheta) + (4k/r)\,(\alpha^{1/4}Px_4 - \alpha^{3/4}Qx_2))^{1/2} + \varphi(\vartheta)) + \alpha^{1/4}(Q/P)x_3 + (2r/P)(Px_4 - \alpha^{1/2}Qx_2)(1-(1/k)x_1))$, $\vartheta \in [-h,0]$.

Теорема 8 *Пусть $\varphi \in W_\infty^2[-h,0]$. Тогда компоненты решения краевой задачи* (28), (27) *определяются асимптотическими формулами*

$$x_s(\vartheta,\varphi,\alpha) = \mathbb{S}_s(\vartheta,\alpha,\varphi)\Delta(\varphi) + \delta_{s1}\frac{k}{r}\left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right) + \\ + O(\alpha^{1/4};\vartheta,\varphi), \quad s = \overline{1,4}, \tag{29}$$

где $\mathbb{S}_s(\vartheta,\alpha,\varphi) = (\sqrt{2}/2)\sum_{j=1}^{2} e_j^{s-2}\exp(\alpha^{-1/4}e_j\int_0^\vartheta \lambda(\tau)\,d\tau)\lambda^{s-1}(\vartheta)$, $\vartheta \in [-h,0]$, $\Delta(\varphi) = \varphi(-h) - (k/r)\,(r - \varphi'(0)/\varphi(0))$, $\lambda(\vartheta) = (r\varphi(\vartheta)/(k\sqrt{P}))^{1/2}$, $e_1 = \bar{e}$, $e_2 = e$, $e_3 = -\bar{e}$, $e_4 = -e$, $e = (1+i)/\sqrt{2}$.

Используя формулу (29), находим минимизирующий элемент

$$x_\alpha(\vartheta) = x_1(\vartheta,\alpha) = \mathbb{S}_1(\vartheta,\alpha,\varphi)\Delta(\varphi) + \frac{k}{r}\left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right), \quad \vartheta \in [-h,0],$$

где $\mathbb{S}_1(\vartheta,\alpha,\varphi) = (\sqrt{2}/2)\sum_{j=1}^{2} e_j^{-1}\exp(\alpha^{-1/4}e_j\int_0^\vartheta \lambda(\tau)\,d\tau)$, $\vartheta \in [-h,0]$.

В параграфе 3.3 находится зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности. При $\Delta(\varphi) \neq 0$ уравнение невязки (5) имеет единственное непрерывное решение при малых положительных δ, определяемое формулой

$$\alpha(\delta,\varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi)\delta^{8/3} + O(\delta^{10/3},\varphi), \tag{30}$$

где $\gamma(\varphi) = \sqrt{2}\Delta^2(\varphi)\sqrt{rP^{3/2}\varphi(0)/k}$.

Теорема 9 *Значение регуляризирующего оператора для уравнения $U(x) = \varphi$ на множестве $D = \{\varphi\colon \Delta(\varphi) \neq 0, \varphi \in W_\infty^2[-h,0]\}$ определяется асимптотической формулой*

$$R(\varphi,\delta)(\vartheta) = \mathbb{S}(\vartheta,\delta,\varphi)\Delta(\varphi) + \frac{k}{r}\left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right) + O(\delta^{2/3};\vartheta,\varphi), \quad \vartheta \in [-h,0],$$

где $\mathbb{S}(\vartheta,\delta,\varphi) = (\sqrt{2}/2)\sum_{j=1}^{2} e_j^{-1}\exp(\delta^{-2/3}\gamma^{1/3}(\varphi)(1 + O(\delta^{2/3},\varphi))e_j\int_0^\vartheta \lambda(\tau)\,d\tau)$, $\vartheta \in [-h,0]$.

Для численного моделирования $R(\varphi,\delta)$ введем оператор $R_1\colon W^2_\infty \to H$, определяемый формулами

$$R_1(\varphi)(\vartheta) = \frac{k}{r}\left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right), \qquad \vartheta \in [-h,0), \qquad R_1(\varphi)(0) = \varphi(-h),$$

и оператор $R_2\colon W^2_\infty \to H$, определяемый формулами

$$R_2(\varphi,\delta)(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j^{-1}\exp\left(\gamma^{1/3}(\varphi)\delta^{-2/3}e_j\int\limits_0^{\vartheta}\lambda(\tau)\,d\tau\right)\Delta(\varphi)+$$

$$+R_1(\varphi)(\vartheta), \quad \vartheta[-h,0), \quad R_2(\varphi,\delta)(0) = R_2(\varphi,\delta)(-0).$$

Теорема 10 *Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда для уравнения $Ux = \varphi$ операторы $R_1\colon D \to H$ и $R_2\colon D \to H$ являются регуляризирующими.*

В параграфе 3.4 строится асимптотика регуляризованых решений на конечном отрезке отрицательной полуоси.

Рассмотрено применение разработанной методики на основе статистических данных изменения численности лосей в Вологодской области с 1999 по 2007 годы. Решена задача идентификации для модели Хатчинсона и задача восстановления предыстории численности популяции на отрезке $[1999, 2004]$. Проведено сравнение результатов восстановления численности популяции по предложенной методике со статистическими данными.

Публикации по теме диссертации

1. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. фак. ВМиК МГУ им. М.В Ломоносова. 2007. Вып. 2. С. 71–99.

2. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Некорректная задача Коши для дифференциальных уравнений запаздывающего типа с обратным временем // Тез. докл. Международ. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Новосибирск, 28 мая – 2 июня, 2007. С. 138–139.

3. Сурков П.Г. Использование асимптотических методов при продолжении решений дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательную полуось // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерые науки. 2008. Вып. 2. С. 148–149 (перечень ВАК).

4. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Некорректная задача продолжения решений линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тез. докл. Международ. конф. «Алгоритмический анализ неустойчивых задач». Екатеринбург. 1–6 сентября, 2008. С. 198–199.

5. Сурков П.Г. Использование преобразования Лапласа при решении некорректной задачи продолжения решения дифференциального уравнения с запаздыванием // Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения», СамДиф - 2007. Самара, 2007. С. 140.

6. Сурков П.Г. Некорректная продолжимость решений дифференциальных уравнений с последействием // Тр. 38-й Регион. молодеж. конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 29 января – 2 февраля, 2007. С. 205–209.

7. Сурков П.Г. Регуляризованные решения линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Материалы II Международ. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования». Воронеж, 11–16 декабря, 2007. С. 188–189.

8. Сурков П.Г. Использование численных методов при нахождении решений дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательной полуоси // Тр. 39-й Регион. молодеж. конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 29 января – 1 февраля, 2008. С. 175–179.

9. Сурков П.Г. Построение решений одной некорректной задачи для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тез. докл. Международ. конф. «Дифференциальные уравнения и топология». Москва, 17–22 июня, 2008. С. 200–201.

10. Сурков П.Г. Регуляризованные решения автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Материалы международ. конф. «Современные проблемы математики, механики и их приложений». Москва, 30 марта – 02 апреля, 2009. с. 217.

11. Сурков П.Г. Асимптотические формулы высокого порядка для регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Проблемы динамического управления: Сб. науч. тр. фак. ВМиК МГУ им. М.В Ломоносова. 2009. Вып. 4. С. 158–174.

12. Сурков П.Г. Асимптотические разложения регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тр. 41-й Регион. молодеж. конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 31 января – 5 февраля, 2010. С. 282–288

13. Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тез. докл. XI Международ. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Конференция Пятницкого. Москва, 1–4 июня, 2010. С. 378–380.

14. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Асимптотика регуляризованных решений линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с опережением // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 4. С. 467–485 (перечень ВАК).

15. Сурков П.Г. Некорректная задача для эволюционной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Тез. II Международ. шк.-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск, 28 июня – 4 июля, 2010. С. 70.

16. Сурков П.Г. Использование численных методов с неравномерной сеткой при нахождении решений дифференциальных уравнений с запаздыванием на отрицательной полуоси // Тез. 42-й Всеросс. молодеж. шк.-конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург, 30 января 6 февраля, 2011. С. 108–110.

17. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 69–83 (перечень ВАК).

Сурков Платон Геннадьевич

Некорректная задача продолжения решений дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.

Подписано в печать 19.01.2011 г.
Формат 60x84 1/16. Объем 1.5 п.л.
Тираж 100 экз.